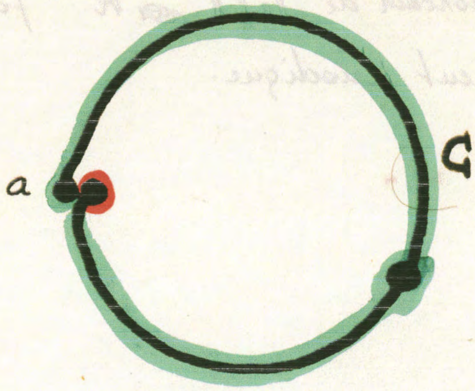
21. CYCLES RECTIFIABLES

Si l'un des cycles ordonnés (de minimum a) du cycle G est rectifiable



Alors $\forall b \in G \setminus \{a\}$

long G_a = somme des longueurs des deux arcs d'extrémités a, b. ■

Tous les cycles ordonnés de G sont rectifiables et ont même longueur ■

▽

CYCLE RECTIFIABLE

= CYCLE dont l'UN des cycles ordonnés est rectifiable

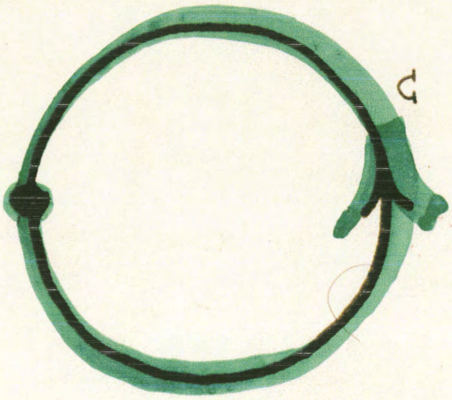
= Cycle dont TOUS les cycles ordonnés sont rectifiables

LONGUEUR d'un cycle rectifiable

= longueur d'un de ses cycles ordonnés

= longueur de ses cycles ordonnés.

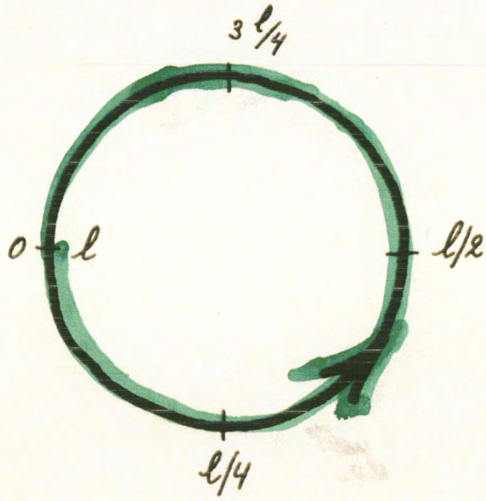
Voici un cycle orienté, pointé rectifiable $\mathcal{C}$ de longueur l



Il existe donc un homéo (= bijection croissante) de $[0, l[\subset \mathbf{R}$ sur le cycle ordonné de minimum a et dont l'ordre appartient au sens de $\mathcal{C}$

En prolongeant par périodicité cette fonction à $\mathbf{R}$, on obtient un enroulement périodique $\mathbf{R} \to \mathcal{C}$, entièrement défini par la métrique de $\mathcal{C}$ et que, pour cette raison on appellera ▼ENROULEMENT METRIQUE▲

Tout cycle orienté définit un enroulement métrique. On peut l'ébaucher schématiquement comme suit.



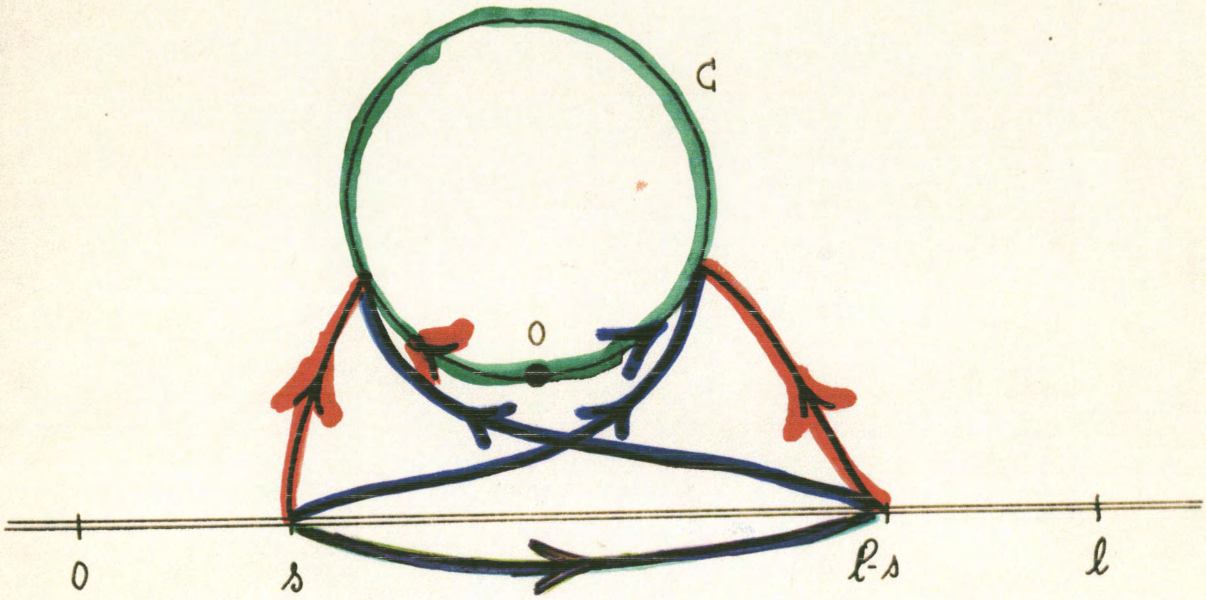
On peut encore dire que
Un enroulement métrique d'un cycle rectifiable est déterminé quand on a marqué 0 en un point du cycle et que l'on a orienté celui-ci.

Tout enroulement périodique d'un cycle l'érige en groupe topologique isomorphe à $\mathbf{R}/\mathbf{Z}+, \tau_{us}$

Marquer 0 en un point d'un cycle rectifiable et orienter le cycle définit un enroulement métrique du cycle et érige le cycle en un groupe topologique isomorphe à $\mathbf{R}/\mathbf{Z}+, \tau_{us}$

Un point d'un cycle rectifiable étant marqué 0 les deux sens du cycle définissent des enroulements métriques différents
Néanmoins, ces deux enroulements différents érigent le cycle en le même groupe topologique.

Les enroulements métriques e_1, e_2 relatifs aux deux sens du cycle rectifiable pointé $C, 0$ (de longueur l)



définissent les isomorphismes de groupes i_1, i_2

$$\mathbf{R}/l\mathbf{Z},+ \xrightarrow{i_1} C,+ \quad \text{et} \quad \mathbf{R}/l\mathbf{Z},+ \xrightarrow{i_2} C,+$$

Dans tout groupe commutatif $K,+$ la permutation $k \mapsto -k$ est un auto.

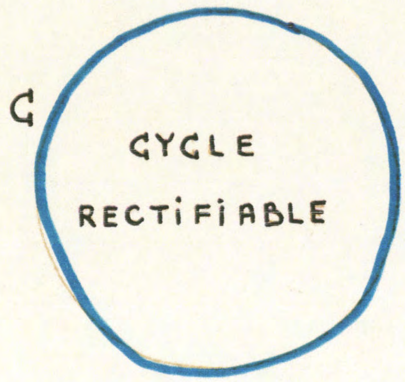
Le diagramme commutatif.

$$\begin{tikzcd}
s+l\mathbf{Z} \arrow[d, mapsto] & \in & \mathbf{R}/l\mathbf{Z} \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "-"'] & C,+ \arrow[d, "1_C"] \\
(l-s)+l\mathbf{Z} = -(s+l\mathbf{Z}) & \in & \mathbf{R}/l\mathbf{Z} \arrow[r, "i_2"] & C,+
\end{tikzcd}$$

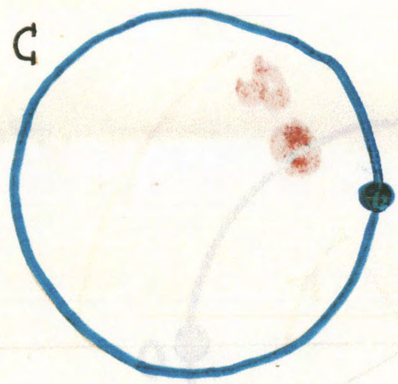
établit que 1_C est un iso $C,+ \to C,+$

$$C,+ \quad = \quad C,+$$

∎



. . .



. . . et le cycle C est devenu un

GROUPE TOPOLOGIQUE COMMUTATIF $C, +$

isomorphe au

GROUPE TOPOLOGIQUE $\mathbb{R}/\mathbb{Z}, +, \tau_{us}$